О НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ

1. Значительная часть классических задач теории переноса излучения ставится и решается в линейном приближении. В них пренебрегают возможным влиянием переносимого излучения на оптические свойства среды. Так, например, мы говорим о задаче диффузного пропускания и отражения света плоским слоем данной оптической толщины τ. Между тем мы хорошо знаем, что оптическая толщина любой заранее заданной среды, состоящей, скажем, из плоскопараллельных слоев, вообще зависит от плотности излучения на ее различных глубинах. Поэтому она будет зависеть от интенсивности падающего на слой света. Только при определенных условиях эта зависимость может быть несущественной, и мы можем ею пренебречь. Так, если речь идет о плоском слое с конечным числом атомов, приходящихся на один квадратный сантиметр, и если рассматривается задача о диффузии в этом слое резонансного излучения, то такое пренебрежение возможно в том случае, когда плотность излучения повсюду мала, вследствие чего мал и процент возбужденных атомов. В таких условиях оптическую толщину можно считать заданной. Однако при больших плотностях излучения мы и здесь не можем пренебречь влиянием излучения на оптические свойства среды, например, на объемный коэффициент поглощения.

По существу это положение дел всегда сознавалось в теоретической астрофизике и при решении некоторых классических задач старались учесть воздействие излучения на среду. Это особенно относится к задаче переноса ионизующего излучения. Учет его воздействия на среду является характерной чертой классической теории НII-областей. С другой стороны, именно недостаточно последовательный учет нелинейных эффектов заставлял многих теоретиков скептически относиться к попыткам применения существующих теорий линий поглощения к тем спектральным линиям, которые соответствуют переходам между возбужденными состояниями (линии субординатных серий). Однако область нелинейных задач все же остается весьма мало разработанной.

Поэтому естественно возникло стремление подвергнуть более систематическому изучению нелинейные задачи. Известное повышение интереса к экспериментам, в которых плотности световых потоков очень велики, усилило это стремление.

При таком систематическом изучении вопроса, наряду с анализом сложных случаев, связанных с процессами, встречающимися в эксперименте, целесообразно подвергнуть разбору относительно простые схемы, которые позволяют более рельефно выявить те или иные характерные нелинейные эффекты. При этом мы имеем в виду прежде всего схемы, в которых имеем дело с некогерентными пучками. В этих слу-

---

В кн.: Теория звездных спектров. М.: Наука, 1966, с. 91.

чаях фазовые соотношения не будут играть заметной роли. Таково, в частности, положение дел в разобранных ниже примерах.

При рассмотрении нелинейных задач открывается весьма широкое разнообразие явлений и для получения определенных результатов оказывается целесообразным сосредоточить внимание на конкретных процессах и явлениях того или иного типа.

Вначале мы остановимся на физических эффектах просветления или помутнения среды, возникающих вследствие перераспределения атомов по уровням энергии. Как ни странно, но оказывается, что при определенном расположении уровней энергии рассматриваемого атома даже небольшие падающие стационарные потоки могут повести к существенному просветлению или помутнению, как это будет показано на конкретном примере.

С другой стороны, можно сосредоточить внимание на нелинейной зависимости диффузно-отраженного или диффузно-пропущенного потока от величины падающего на среду стационарного потока. Нами будет рассмотрен и такой пример, в котором наиболее важным является выявление этой зависимости.

2. Эффекты, связанные с перераспределением атомов по состояниям, оказываются при больших плотностях излучения существенными даже в простейшей задаче переноса монохроматического излучения через среду конечной толщины, когда эта среда состоит из атомов, имеющих только два уровня энергии и речь идет о поле квантов, частота которых соответствует переходу между этими состояниями.

Как известно, в линейной теории в случае чистого рассеяния мы имеем для коэффициента диффузного пропускания через среду с конечной оптической толщиной τ в одномерной задаче (или, лучше сказать, в одномерном приближении) решение

$$q=\frac{H}{F}=\frac{1}{1+\frac{\tau}{2}}, \tag{1}$$

где H и F представляют собой соответственно интенсивности прошедшего и падающего потоков.

Если же при расчете учитывать вызываемое излучением уменьшение объемного коэффициента рассеяния вследствие перехода части атомов из первого состояния во второе (просветление), то получается

$$q=\frac{H}{F}=\frac{1+\alpha F}{1+\frac{\tau_0}{2}+\alpha F}, \tag{2}$$

где τ_0—уже представляет собой предельное значение оптической толщины среды, соответствующее случаю, когда все атомы находятся в нижнем состоянии, а постоянная

$$\alpha=\frac{1}{a}\left(1+\frac{g_2}{g_1}\right)$$

зависит от весов g_2 и g_1 состояний и множителя

$$a=\frac{8\pi h\nu^3}{c^2}.$$

Сравнивая формулы (1) и (2), мы видим, что в зависимости от значения падающего потока F возможны следующие случаи:

а) $\alpha F \ll 1$. В этом случае просветление практически отсутствует и можно пользоваться классической формулой (1);

б) $1 \ll \alpha F \ll \tau_0/2$—имеем значительное просветление;

в) $\alpha F \gg 1+\tau_0/2$—приближенно имеем: $H \approx F$, т. е. почти полное просветление среды.

Таким образом, все зависит от значения

$$\alpha F = \frac{F}{a}\left(1+\frac{g_2}{g_1}\right). \tag{3}$$

Вывод формулы (2) основан на следующих простых соображениях. Очевидно, что формула (1) является правильным решением задачи при заданной реальной оптической глубине τ (т. е. той, которая будет иметь место при данном значении потока F), не равной τ_0. Все дело заключается в том, что в новой постановке задачи (нелинейной) τ есть величина, которая должна быть найдена по заданным F и τ_0. Однако, оставляя пока τ неопределенным, мы можем по обычной линейной теории для каждого τ рассчитать поле излучения, а отсюда и возбуждение атомов n_2/n_1 как функцию оптической глубины x (эта функция будет также зависеть от F и полной оптической толщины τ как параметров)

$$\frac{n_2}{n_1} = p(x).$$

Если k—коэффициент на один атом, то можно написать такое равенство;

$$k(n_1+n_2) = k\frac{1+\frac{n_2}{n_1}}{1-\frac{g_1}{g_2}\frac{n_2}{n_1}}\left(n_1-\frac{g_1}{g_2}n_2\right) = \frac{1+p(x)}{1-\frac{g_1}{g_2}p(x)}\frac{dx}{ds},$$

где ds—элемент линейной глубины. Умножая на ds и интегрируя по всей линейной толщине слоя, получаем:

$$\tau_0 = \int_0^{s_0} k(n_1+n_2)ds = \int_0^{\tau} \frac{1+p(x)}{1-\frac{g_1}{g_2}p(x)}dx. \tag{4}$$

Первая часть этого уравнения будет, таким образом, определена как некоторая определенная функция τ. Обращая эту функцию, найдем τ в зависимости от τ_0 и F, поскольку p(x) зависела от этих величин как параметров (завися также и от x). Подставляя выражение τ через τ_0 и F в (1), мы приходим легко к формуле (2).

Этому простому методу решения нелинейной задачи, который в данном случае не требует особой догадливости, мы дадим несколько громкое название: *метод самосогласованных оптических глубин.* Как будет видно из следующего примера, он может применяться и в некоторых более сложных случаях, что в известной мере оправдывает введение специального названия.

3. Как известно, к числу мало изученных задач теории переноса излучения в рассеивающей и поглощающей среде относится группа проблем, относящихся к такому типу многократного рассеяния, при котором происходит перераспределение энергии между частотами раз-

личных линий. В этих задачах поля излучений в частотах разных линий взаимодействуют между собой. При этом уже схематический случай среды, состоящей из атомов, имеющих три уровня энергии, представляет в общем случае большие трудности. Правда, при некоторых частных предположениях, соответствующих малости некоторых параметров, входящих в уравнение, эта задача решается. Например, 32 года назад удалось разработать метод «разделения полей» для решения задачи лучистого равновесия в водородной планетарной туманности. Однако рассмотрение других случаев требует систематического развития методов решения нелинейных задач.

Рассмотрим здесь частный случай, когда переход $1 \to 2$ запрещен и состояние 2 является метастабильным. При этом будем считать поле излучения стационарным, а также считать, что столкновения не играют роли.

В этом случае, вследствие отсутствия циклических переходов $1 \to 2 \to 3 \to 1$ и противоположных, в каждом объеме излучается столько квантов ν_1 (соответствующих переходу $1 \to 3$), сколько их поглощается. То же самое справедливо для частоты ν_2 (соответствующей переходу $2 \to 3$). Поэтому проблема сводится по существу к чистому рассеянию в каждой из частот в отдельности.

Распределение атомов по уровням определяется уравнениями стационарности, которые в данном случае принимают простой вид:

$$B_{1\to 3} n_1 \rho_1 = n_3 B_{3\to 1}(\sigma_1 + \rho_1) \tag{5}$$

$$B_{2\to 3} n_2 \rho_2 = n_3 B_{3\to 2}(\sigma_2 + \rho_2), \tag{6}$$

где

$$\sigma_i = \frac{8\pi h \nu_i^3}{c^3}.$$

Допустим, что мы имеем дело с малыми интенсивностями:

$$\rho_1 \ll \sigma_1; \quad \rho_2 \ll \sigma_2.$$

Тогда

$$\frac{n_3}{n_1} = \frac{g_3}{g_1}\bar{\rho}_1, \qquad \frac{n_3}{n_2} = \frac{g_3}{g_2}\bar{\rho}_2, \tag{7}$$

где

$$\bar{\rho}_i = \frac{\rho_i}{\sigma_i}.$$

Теперь еще более конкретизируем задачу. Допустим, что на одну сторону среды конечной толщины падают потоки излучения F_1 и F_2 в частотах ν_1 и ν_2 соответственно. Требуется найти диффузно-пропущенные потоки H_1 и H_2, рассматривая одномерное приближение.

Применяем тот же метод самосогласованных оптических глубин. Заданным параметром является число атомов, приходящихся на один квадратный сантиметр. Если через τ_1^0 и τ_2^0 обозначить реальные оптические толщины в соответствующих частотах, то это означает, что нам задана величина

$$\frac{1}{k_1}\tau_1^0 + \frac{1}{k_2}\tau_2^0 = N, \tag{8}$$

где k_1 и k_2—соответствующие коэффициенты поглощения на один атом.

Однако величины τ_1^0 и τ_2^0 в отдельности неизвестны и должны быть определены из задачи как функции параметров F_1, F_2 и N.

Поскольку в каждой частоте имеет место чистое рассеяние, то мы можем определить интенсивность излучения в каждой частоте как функцию соответствующей оптической глубины x_i и параметров F_i и τ_i^0 и найти отношения, которые характеризуют возбуждение атомов:

$$\frac{n_3}{n_1}=p_1(x_1),\quad \frac{n_3}{n_2}=p_2(x_2), \tag{9}$$

где, повторяем, p_1 и p_2 должны зависеть еще от параметров F_1, τ_1^0 и F_2, τ_2^0 соответственно.

Из (9) имеем

$$n_1p_1(x_1)=n_2p_2(x_2) \tag{10}$$

или

$$k_1n_1p_1(x_1)ds=\frac{k_1}{k_2}k_2p_2(x_2)ds, \tag{11}$$

где k_1 и k_2—соответствующие коэффициенты поглощения на один атом.

Интегрируя (11) по всей толщине слоя, получаем

$$\int_0^{\tau_1^0}p_1(x_1)dx_1=\frac{k_1}{k_2}\int_0^{\tau_2^0}p_2(x_2)dx_2. \tag{12}$$

Левая часть этого равенства есть некоторая определенная функция от τ_1^0 и F_1, а правая—от τ_2^0 и F_2.

Из двух уравнений, (12) и (8), можно найти τ_1^0 и τ_2^0 как функции от N, F_1 и F_2, а отсюда найти значения потоков H_i по формуле

$$H_i=\frac{F_i}{1+\frac{1}{2}\tau_i^0}. \tag{13}$$

Как показывает проведенное таким образом вычисление, для потока H_1, например, получается выражение

$$H_1=\frac{F_1}{1+\dfrac{k_1N}{2\left(1+\dfrac{g_2}{g_1}\dfrac{F_1}{F_2}\right)}}. \tag{14}$$

Здесь представляют интерес три различных случая:

а) $F_1 \ll F_2$, тогда

$$H_1=\frac{F_1}{1+\frac{1}{2}k_1N}.$$

Иными словами, когда поток F_2 по порядку величины больше потока F_1, то поток H_1 получается таким же, как в линейной задаче, в предположении, что все атомы находятся в состоянии 1.

б) $F_2 \ll F_1 \ll F_2 k_1 N$. Тогда

$$H_1 = \frac{g_2 F_1^2}{g_2 F_1 + \frac{1}{2} g_1 F_2 k_1 N}.$$

в) $F_1 \gg F_2 k_1 N$. В этом случае имеем полное просветление среды в частоте ν_1 и

$$H \approx F_1.$$

Итак, в нашей схеме имеет место эффект просветления среды в одной из частот, причем для этого не требуется очень интенсивного потока излучения. Необходимо только, чтобы поток излучения в другой частоте был бы во много раз меньше потока излучения в той частоте, в которой мы добиваемся просветления.

Таким образом, у нас в руках имеется простой способ регулирования прозрачности данной среды в каждой из двух частот.

В рассмотренных физических предположениях другая задача—о диффузном отражении от слоя бесконечно большой толщины—имеет тривиальное решение: в обеих частотах отраженные потоки равны падающим, ибо, как было упомянуто, в каждой частоте имеет место чистое рассеяние.

Положение дел сильно осложняется, если мы допускаем переходы $2 \to 1$. Если мы допустим, что эти переходы происходят без излучения, т. е. соответствующая энергия передается среде, а обратными переходами $1 \to 2$ можно пренебречь, то оказывается, что соответствующая задача о диффузном отражении может быть легко решена, но уже не методом самосогласованных оптических глубин, а путем применения принципа инвариантности. Такое решение было найдено одним из моих дипломников, участником ереванского семинара по теории переноса излучения. Мы здесь не приводим это решение.

Встает, однако, вопрос, как можно применять принцип инвариантности для нелинейных задач. Ведь причиной нелинейности является то, что мы уже не пренебрегаем влиянием излучения на оптические свойства среды, на значения оптических характеристик в каждой точке среды. Между тем операция прибавления некоторого, скажем, элементарного слоя к уже существующему, выполняемая при решении задач на основе принципа инвариантности, основана на допущении, что среда и прибавляемый слой имеют повсюду одни и те же значения оптических характеристик (например, значение λ—отношение коэффициента рассеяния к коэффициенту экстинкции).

Однако более внимательное рассмотрение вопроса показывает, что принцип инвариантности можно применять и в том случае, когда зависимость оптических характеристик от поля излучения одна и та же для всех точек среды.

4. Для примера рассмотрим применение принципа инвариантности к задаче диффузного пропускания и отражения света через среду конечной толщины. При этом опять остановимся на одномерном приближении, чтобы не иметь дела с углами падения и диффузного отражения, а также допустим, что имеем дело с чистым рассеянием.

Вспомним, как решалась эта задача в линейной теории. Задавалась оптическая толщина слоя τ_0. Предполагалось, что на одну сторону слоя падает поток F (рис. 1); нужно было отыскать поток H, который выходит с противоположной стороны. Вследствие линейности задачи предполагалось, что поток H пропорционален F и, следовательно, остается лишь отыскать «коэффициент диффузного пропускания» q, входящий в формулу $H=qF$. Если мы имеем дело с чисто рассеивающей средой, то тем самым определяется и диффузно-отраженный поток, который по закону сохранения энергии должен быть равен $(1-q)F$. Искомый коэффициент q должен зависеть от τ_0 и задача состояла в отыскании функции $q(\tau_0)$.

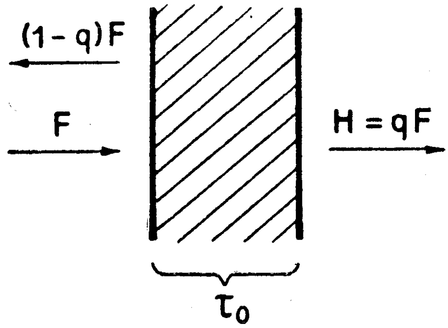

Рис. 1.

Довольно изящный способ отыскания функции $q(\tau_0)$ заключался в получении функционального уравнения путем рассмотрения картины сложения двух слоев с оптическими толщинами τ_1 и τ_2, которые вместе составляют один слой с оптической толщиной $\tau_1+\tau_2$ (рис. 2).

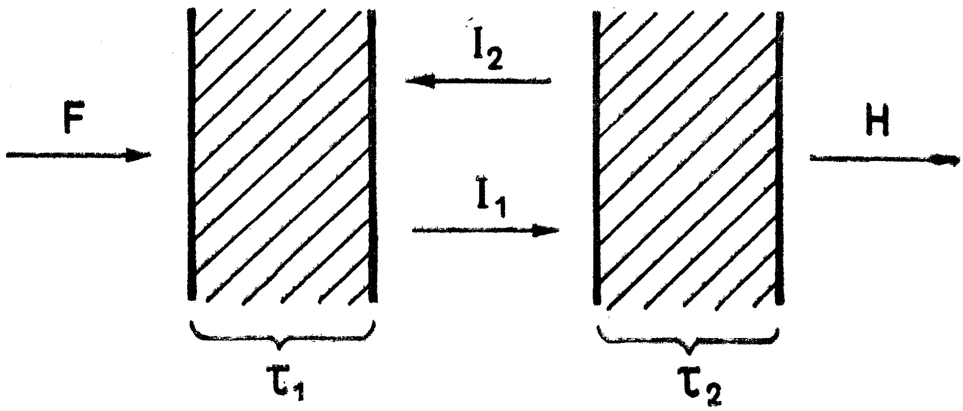

Рис. 2.

Как показано на рис. 2, мы можем рассмотреть потоки I_1 и I_2, которые получаются на границе между двумя слоями и идут в противоположных направлениях. Из постулированных выше свойств рассеивающих сред мы легко получаем уравнения

$$H=q(\tau_1+\tau_2)F,$$

$$H=q(\tau_2)I_1,$$

$$I_1=q(\tau_1)F+[1-q(\tau_1)]I_2,$$

$$I_2=[1-q(\tau_2)]I_1.$$

Рассматривая эти уравнения как систему четырех однородных уравнений с четырьмя неизвестными H, F, I_1 и I_2, мы можем потребовать, чтобы ее определитель был равен нулю (условие разрешимости). Отсюда сразу получаем функциональное уравнение для $q(\tau)$:

$$\frac{1}{q(\tau_1+\tau_2)}=\frac{1}{q(\tau_1)}+\frac{1}{q(\tau_2)}-1, \tag{15}$$

которое удовлетворяется решением

$$q(\tau)=\frac{1}{1+a\tau}. \tag{16}$$

В нелинейном случае той же самой проблемы возникают следующие осложнения и трудности.

Прежде всего в схеме рис. 1 мы не можем уже писать $H=q(\tau_0)F$, а должны принять, что H есть некоторая функция от F и от некоторого параметра, характеризующего толщину слоя. Удобно в качестве такого параметра принять оптическую толщину в пределе, когда интенсивности всех излучений равны нулю. Обозначим эту «предельную» оптическую толщину σ_0. Тогда мы должны иметь $H=\Psi(F, \sigma_0)$. Но и это не все. При попытке применения метода сложения слоев мы сталкиваемся с тем фактом, что в один из рассматриваемых слоев входят два потока F и I_2. Вследствие нелинейности явления поток, входящий с противоположной стороны, меняет оптические свойства среды, а следовательно, и ту долю потока F, которая подвергается диффузному пропусканию. Поэтому волей-неволей мы вынуждены ввести в рассмотрение более общий случай и изучать результат вхождения в среду двух потоков, F_1 и F_2. Подлежащая рассмотрению картина изоб-

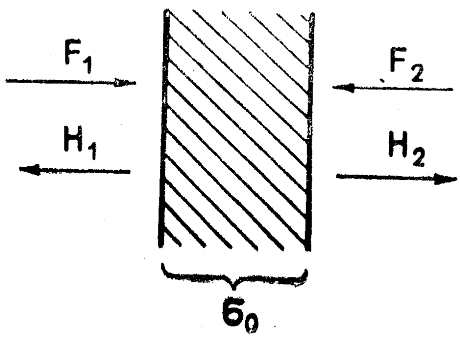

Рис. 3.

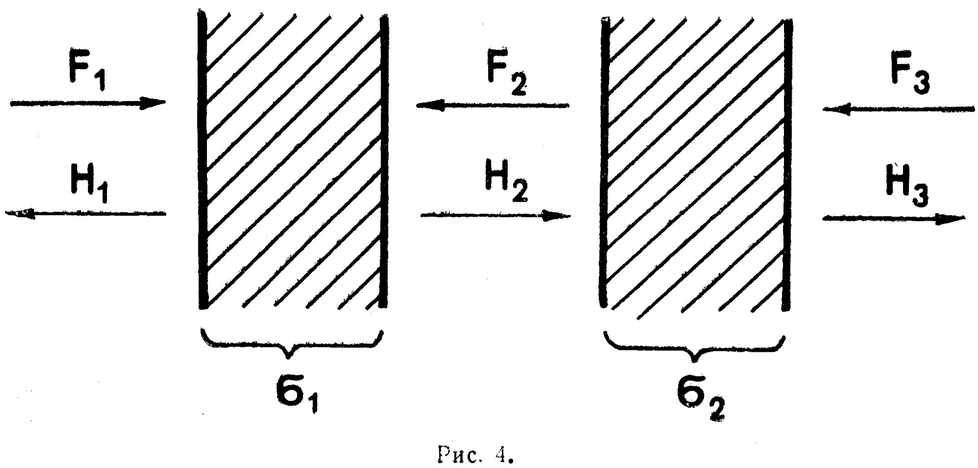

Рис. 4.

ражена на рис. 3. Величина H_1 должна зависеть от F_1, F_2 и σ_0. Точно так же H_2 должна зависеть от этих величин. Имеем, очевидно,

$$H_1=\varphi(F_1, F_2; \sigma_0), \tag{17}$$

$$H_2=\varphi(F_2, F_1; \sigma_0), \tag{18}$$

и речь идет об отыскании этой функции.

Рассматривая схему сложения двух слоев, представленную на рис. 4, мы найдем между шестью величинами H_1, H_2, H_3, F_1, F_2 и F_3 наряду с (17) и (18), еще следующие четыре зависимости:

$$F_2=\varphi(H_2, F_3; \sigma_2), \tag{19}$$

$$H_3=\varphi(F_3, H_2; \sigma_2), \tag{20}$$

$$H_1=\varphi(F_1, F_3; \sigma_1+\sigma_2), \tag{21}$$

$$H_3=\varphi(F_3, F_1; \sigma_1+\sigma_2). \tag{22}$$

Теперь надо попытаться свести задачу к одному функциональному уравнению.

Сравнивая (20) и (22), имеем

$$\varphi(F_3, F_1; \sigma_1+\sigma_2)=\varphi(F_3, H_2; \sigma_2).$$

Подставляя в правую часть этого равенства H_2 из (18), находим

$$\varphi(F_3, F_1; \sigma_1+\sigma_2)=\varphi(F_3, \varphi(F_2, F_1; \sigma_1); \sigma_2). \tag{23}$$

С другой стороны, подставляя (18) в (19), найдем

$$F_2=\varphi(\varphi(F_2, F_1, \sigma_1), F_3; \sigma_2). \tag{24}$$

Пусть решение этого уравнения относительно F_2 будет

$$F_2=u(F_1, F_3; \sigma_1; \sigma_2). \tag{25}$$

Функция u целиком определяется заданием φ. Исходя из этого, мы можем утверждать, что, подставляя (25) в (23), мы будем иметь уравнение

$$\varphi(F_3, F_1; \sigma_1+\sigma_2)=\varphi(F_3, \varphi(u(F_1, F_3; \sigma_1, \sigma_2), F_1; \sigma_1); \sigma_2), \tag{26}$$

обе части которого выражаются через φ. Следовательно, уравнение (26) вместе с определением функции u из соотношений (24) и (25) есть некоторое весьма своеобразное *функциональное уравнение* для φ.

Поскольку весьма трудно прямо решить полученное функциональное уравнение, мы свели его к дифференциальному уравнению, для чего приняли, что σ_2—малая величина. Тогда вместо уравнения (19) можем написать

$$F_2=F_3+\alpha(H_2, F_3)\sigma_2, \tag{27}$$

где $\alpha(H_2, F_3)$—некоторая функция, характеризующая среду. Точно так же вместо (20) имеем

$$H_3=H_2+\alpha(F_3, H_2)\sigma_2. \tag{28}$$

Исключая теперь из системы уравнений (17), (18), (21), (22), (27) и (28) величины H_1, H_2, H_3 и F_2 и отбрасывая при этом члены с высшими степенями σ_2, мы получаем следующее уравнение:

$$\frac{\partial\varphi(F_3, F_1; \sigma_1)}{\partial\sigma_1} = \frac{\partial\varphi(F_3, F_1; \sigma_1)}{\partial F_3}\alpha(\varphi(F_3, F_1; \sigma_1), F_3) + \alpha(F_3, \varphi(F_3, F_1; \sigma_1)). \quad (29)$$

Получилось нелинейное дифференциальное уравнение для φ. Для упрощения обозначим:

$$H_3 = \varphi(F_3, F_1; \sigma_1) = z; \quad F_1 = x; \quad F_3 = y; \quad \sigma_1 = \sigma.$$

Тогда

$$\frac{\partial z}{\partial\sigma} = \frac{\partial z}{\partial y}\alpha(z, y) + \alpha(y, z). \quad (30)$$

При $\sigma \to \infty$ наша задача превращается в проблему нахождения интенсивности диффузно-отраженного от бесконечного слоя потока z, когда на него падает поток y. Уравнение (30) сводится тогда к более простому:

$$\frac{\partial z}{\partial y}\alpha(z, y) + \alpha(y, z) = 0, \quad (31)$$

где z уже не зависит от $x = F_1$.

Если допустить, что при элементарном акте рассеяния имеет место изотропия, то $\alpha(z, y)$ должно иметь следующий вид:

$$\alpha(z, y) = -yk(z+y) + g(z+y). \quad (32)$$

При начальном условии $z=0$ при $y=0$ решение этого уравнения имеет простой вид

$$yz = G(y+z), \quad (33)$$

где $G(\xi)$ есть функция, равная

$$G(\xi) = \int_0^{\xi} \frac{g(x)}{k(x)}\, dx. \quad (34)$$

Для примера разберем частный случай, когда

$$\frac{g(x)}{k(x)} = \frac{\lambda}{2}\,\frac{a^2\xi}{a^2+\xi^2}.$$

Это значит, что из энергии, поглощенной в элементарном акте, рассеивается доля

$$\lambda\,\frac{a^2}{a^2+\xi^2},$$

т. е. при возрастании интенсивности света рассеиваемая доля уменьшается. Тогда

$$G(x) = \frac{\lambda}{4}a^2 \ln\left[1 + \frac{x^2}{a^2}\right],$$

и решение имеет вид

$$yz = \frac{\lambda}{4}a^2 \ln\left[1 + \frac{(y+z)^2}{a^2}\right].$$

Из этого решения видно, что при $y \to \infty$ альбедо z/y стремится к нулю. Наоборот, при $y \ll a$ будем иметь обычную для линейного случая формулу

$$\frac{z}{y} = \frac{2 - \lambda - \sqrt{1 - \lambda}}{\lambda}.$$

Мы не будем останавливаться на других примерах. Нашей целью было показать, что принцип инвариантности с успехом может применяться при решении по крайней мере некоторых задач нелинейной теории переноса излучения. Но практическое значение, конечно, будет иметь применение принципа инвариантности к более сложным задачам, чем разобранная здесь простая схема.

Примечание В трех предыдущих статьях рассматриваются нелинейные задачи теории переноса излучения. Характерная черта этих задач состоит в том, что оптические толщины в различных частотах являются не заданными, а искомыми. Для их определения В. А. Амбарцумян предложил «метод самосогласованных оптических глубин». Впоследствии развитие этого метода и его применения были выполнены Н. Б. Енгибаряном, А. Г. Никогосяном и др. Следует отметить, что в современной астрофизике с помощью ЭВМ решаются нелинейные задачи для реальных многоуровенных атомов. Однако результаты, содержащиеся в приведенных статьях, имеют важное значение, по крайней мере, в том отношении, что они дают качественную картину явлений.